

Mathématiques Pures

Calcul différentiel et intégral

Résumé de concepts

3rd Secondary

Unité 1

Differentiation et ses Applications

La dérivation des fonctions trigonométriques

Fonction	Dérivée
Fonction sinus sin x	cos x
Fonction cosinus cos x	- sin x
Fonction tangente tan x	$\sec^2 x$
Fonction cotangente cotg x	$-\operatorname{cosec}^2 x$
Fonction sécante sec x	sec x tan x
Fonction cosécante cosec x	- cosec x cotg x

Dérivation implicite

Dans la dérivation de la relation implicite f(x ; y) = 0, on dérive les deux membres de la relation par rapport à l'un des deux variables suivant les règles de la dérivation en chêne pour obtenir $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dx}{dy}$ respectivement .

Dérivation paramétrique

Si la courbe donnée est sous la forme paramétrique x = f (t) , y = g (t), alors $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$ où f et g sont dérivables par rapport à t

Dérivations successives

Si y = f (x) où f est une fonction dérivable par rapport à x, les dérivées à partir de la deuxième dérivée (s'elle existe) sont appelées les dérivées successives . On les note $\frac{d^2y}{dx^2}$ou y'' La troisième dérivée par $\frac{d^3y}{dx^3}$ou y''' et la niéme dérivée par $\frac{d^ny}{dx^n}$ ou $y^{(n)}$ où n est un entier positif.

Equation de la tangente et de la normale à une courbe

La courbe de la fonction f où y = f(x), m est la pente de la tangente à la courbe en ce point, alors :

1- l'équation de la tangente à la courbe au point (x_1 , y_1) est : $y - y_1 = m (x - x_1)$

2- l'équation de la normale à la courbe au point (x_1, y_1) est : $y - y_1 = \frac{-1}{m} (x - x_1)$

Dérivation des fonction liées au temps

Si y = f(x) , x varie selon la variation du temps t , alors y varie aussi selon la variation du temps t. c,est -à-dire y est une fonction de la fonction en t et $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$. Cette relation relie le taux de variation de x par le taux de variation de y par rapport au temps .

Le taux est positif si la variable augmente quand le temps augmente.

Le taux est négatif si la variable diminue quand le temps augmente.

Unité 2

Dérivation et Intégral des fonctions exponentielles et logarithmiques

Le nombre e : Le nombre e est défini par la relation

(1) $e = \lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (2) $e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (3) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(4) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ où $a>0$ (5) $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

fonction exponentielle de base népérien est une fonction exponentielle de base e où $f(x) = e^x$, $x \in R$

fonction de logarithme népérien est une fonction logarithmique de base e où $f(x) = \ln x$ et $x \in R^+$

Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques

Fonction	dérivée de la fonction	condition
e^x	e^x	$x \in R$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \times f'(x)$	f est dérivable
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$; $x \neq 1$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\ln \lvert f(x) \rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	f est dérivable $f(x) \neq 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	
$\log_a f(x)$	$\frac{1}{f(x) \ln a} f'(x)$	

Intégral des fonctions exponentielles et logarithmiques

Fonction	**intégral de la fonction**	condition
e^x	$e^x + c$	$x \in R$
e^{kx}	$\frac{1}{k} e^{kx} + c$	$k \neq 0$
$e^{f(x)} \times f'(x)$	$e^{f(x)} + c$	f est dérivable
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + c$	$x \neq 0$
$\frac{1}{f(x)} \times f'(x)$	$\ln \lvert f(x) \rvert + c$	f est dérivable $f(x) \neq 0$

La dérivée logarithmique on peut représenter la relation entre les variables sous la forme logarithmique par prendre le logarithme népérien de ses membres et on utilise les propriétés des logarithmes pour mettre la relation sous la forme la plus simple avant de faire la dérivation

Unité 3

Comportement d'une fonction et tracé de la courbe

Etude de la monotonie d'une fonction à l'aide de la dérivée première:

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur]a ; b[:

1- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in$]a ; b [alors f est croissante dans]a ; b[.

2- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in$]a ; b [alors f est décroissante dans]a ; b[.

Point critique:

Soit f une fonction continue dans]a ; b[on dit que (c ; f(c)) est un point critique s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes: si $c \in$]a ; b[, $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas

Valeurs maximale et minimale absolue:

Soit f une fonction contenue dans un intervalle [a; b] , $c \in$ [a; b], alors:

1- f atteint une valeur maximale absolue en $x = c$, si $f(x) \leq f(c)$ pour tout $x \in$ [a ; b].

2- f atteint une valeur minimale relative en $x = c$, Si $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in$ [a ; b].

Etude de la dérivée première pour déterminer les valeurs maximales et minimales relatives:

Si f(x) est contenue en $x = c$ et (c ; f(c)) est point critique où $c \in$ un intervalle ouvert

1- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x < c$, $f'(x) < 0$ pour tout $x > c$, alors f(c) est une valeur maximale relative.

2- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x < c$, $f'(x) < 0$ pour tout $x > c$, alors f(c) est une valeur minimale relative.

Théorème: Si f est dérivable dans]a , b[et elle atteint une valeur maximale ou minimale relative en $c \in$]a , b[, alors $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas

Les valeurs extrémales d'une fonction dans un intervalle fermé:

Théorème: Si la fonction est continue dans [a ; b], alors la fonction atteint une valeur maximale absolue et une valeur minimale absolue dans [a ; b].

Convexité des courbes

Soit f une fonction dérivable dans]a ; b[, la courbe de la fonction est convexe vers le bas si f ' est croissante dans cet intervalle et convexe vers le haut si f ' est décroissante dans cet intervalle.

Etude de la deuxième dérivée pour déterminer la convexité d'une courbe

Théorème : Soit f une fonction dérivable deux fois dans]a ; b[, alors:

1- Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in$]a ; b[, alors la courbe de la fonction est convexe vers le bas dans]a ; b[.

2- Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in$]a ; b[, alors la courbe de la fonction est convexe vers le haut dans]a ; b[.

Point d'inflexion

Soit f une fonction continue dans]a ; b[, $c \in$] a ; b[et une tangente de la courbe passe par le point (c ; f(c)). Ce point est appelé point d'inflexion de la courbe s'il change de convexité.

Etude de la deuxième dérivée pour les valeurs maximales ou minimales relatives

Théorème: Soit la fonction f dérivable deux fois sur un intervalle]a; b[, $c \in$]a; b[, où $f'(c) = 0$

1- Si $f''(c) < 0$ alors f(c) est une valeur maximale relative.

2- Si $f''(c) > 0$ alors f(c) est une valeur minimale relative.

Unité 4

Intégral finie et ses applications

Différentiation d'une fonction : soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert qui contient x ; y = f(x) alors : d y = f ' (x) d x où dy est la différentiel de y et dx est la différentiel de x.

Intégral par substitution : L'une des méthodes pour trouver l'intégral de produit de deux fonctions dans lequel en transforme l'intégral en Intégral usuelle ; si z = g (x) est une fonction dérivable, alors :

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = \int f(z)dz$$

Intégral par partition : L'une des méthodes pour trouver l'intégral de produit de deux fonctions l'une n'est pas la dérivée de l'autre, Si y et z sont deux fonctions en x et dérivables sur un intervalle I :

alors: $\int ydz = yz - \int zdy$

Tableau des primitives de quelques fonctions usuelles	
$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ou $n \neq -1$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$ où $x \neq \frac{2n+1}{2}\pi, n \in Z$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$\int cosec\, x \cot x\, dx = -cosec\, x + c$ où $x \neq n\pi, n \in Z$
$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	$\int e^x\, dx = e^x + c$
$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$ où $x \neq \frac{2n+1}{2}\pi, n \in Z$	
$\int cosec^2 x\, dx = -\cot x + c$ où $x \neq n\pi, n \in Z$	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + c$ où $x \neq 0$

- Quand on ajoute une constante à la variable indépendante ne change pas les règles d'intégrale .
- si on multiplie la variable x par le coefficient a , l'intégral garde sa formule précédente en divisant par ce coefficient.

Intégral finie : **Théorème**:

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a ; b] et F une primitive quelconque de f sur [a ; b] alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Propriétés de l'intégral finie :

Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a ; b], alors :

① $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ② $\int_a^a f(x)dx = 0$

③ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ pour tout c ∈ [a ; b]

④ $\int_{-a}^a f(x)d\,x = 0$ si *f* est une fonction impaire

⑤ $\int_{-a}^a f(x)d\,x = 2\int_0^a f(x)d\,x$ si *f* est une fonction paire

- L'aire de la région limitée par la courbe de la fonction f continue sur l'intervalle [a ; b] et l'axe des abscisses et les droites x = a et x = b où f(x) ≥ 0 est A= $\int_a^b \lvert f(x)\rvert d\,x$
- L'aire de la région comprise entre deux courbes : des fonctions f et g qui sont deux fonctions ontinues

sur l'intervalle [a ; b] et les droites x = a et x = b où f(x) ≥ g (x) > 0 est : A= $\int_a^b \lvert f(x) - g(x)\rvert dx$

Solide de révolution:

Le Solide de révolution engendré par la rotation d'une région plane une tour complète autour d'une droite qui est appelée axe de révolution.

- Le volume de solide engendré par la rotation d'une région limité par la courbe de la fonction f qui est continue sur l'intervalle [a ; b] et l'axe des abscisses et les droites x = a et x = b , une tour complète autour de l'axe des abscisses où *f* (x) ≥ 0 est V = π $\int_a^b [f(x)]^2 d\,x$
- Le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par deux courbes des f et g qui sont continues sur l'intervalle [a ; b] et les droites x = a et x = b, au cours d'une révolution autour de l'axe des abscisses est où f(x) ≥ g (x) > 0 est : V = π $\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$



مفاهيم الرياضيات البحتة

الجبر والهندسة التحليلية الفراغية

الصف الثالث الثانوى